Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Steel compression design: the bucklings weigth

Jaime Cervera[1], J. Ortiz[2], M. Vázquez[2], A. Aznar[2]

1 Universidad Politécnica de Madrid

2 Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Departamento de Estructuras de Edificación, Avda. Juan de Herrera s/n, 28040, Madrid, España

Abstract

The verification of the slender compressed members of a structure is a well formulated and codified problem. However, the non-linearity of the design process, combined with the no linearity of the physical problem requires an iterative process to define the piece that solves a given problem. This paper demonstrates an identity relationship between seemingly different problems, based on which we develop a theoretical approach and a simple procedure to determine, without iteration and with little margin for error, the piece needed for a given problem. The paper provides a statistical model to check that the provided procedure is safe and effective in the 98% of the problems in buildings —pillars and bars from trusses—. The presented approach therefore greatly facilitates decisions in this area.

OPEN ACCESS

Published: 01/06/2013

Accepted: 15/11/2011

Submitted: 24/05/2011

DOI:
10.1016/j.rimni.2013.04.005

Keywords:
Steel design
Buckling
Slender column compression capacity

Resumen

La comprobación de la capacidad resistente de piezas comprimidas esbeltas es un problema bien codificado. Sin embargo, la no linealidad del proceso de proyecto, sumada a la no linealidad del problema físico, exige un proceso iterativo para la definición de la pieza necesaria para resolver un problema dado. En este trabajo se demuestra la existencia de una relación de identidad entre problemas aparentemente diferentes, sobre la cual se desarrolla un enfoque teórico y un procedimiento sencillo que permite determinar, sin necesidad de iteración y sin apenas margen de error, la pieza necesaria para un problema dado. Se aporta un modelo estadístico que permite comprobar que el procedimiento aportado resulta seguro y eficiente en el 98% de los problemas de edificación más habituales —pilares y barras de cerchas—. El enfoque aportado permite por ello agilizar enormemente la toma de decisiones en este ámbito.

Palabras clave

Proyecto en acero ; Pandeo ; Capacidad resistente de columnas esbeltas

1. Introducción

En este apartado, a fin de facilitar la identificación de los elementos teóricos más novedosos, se da un repaso a la terminología y a la simbología habitual, mostrando la opacidad de los modelos actuales que, pese a ser bien precisos para la comprobación de piezas, resultan inadecuados para la reflexión de proyecto.

El trabajo parte de una idea señera, original de Aroca hace casi 30 años, que incorporó a su actividad y a sus publicaciones docentes [1][1][2] , y que había sido recogida y desarrollada con aportaciones como las de De Miguel [5] , González Cárceles [3] , Cervera [6] o Antuña y Vázquez [7] , entre otros, aunque escasamente difundida hasta ahora fuera del ámbito de la Escuela de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid.

A lo largo del presente artículo se detallan referencias históricas sobre la cuestión [8] , [9] , [10] , [11] and [12] , así como referencias básicas sobre los criterios de pandeo de soportes actualmente implantados en el Eurocódigo 3 y en las normativas nacionales europeas [13] and [14] . Puede encontrarse una extensa exposición sobre modelos teóricos y numéricos empleados a lo largo de la historia en [15] and [16] . Se incluyen finalmente referencias sobre técnicas estadísticas utilizadas para la gestión e interpretación de la muestra de datos manejada en la presente investigación [17] , [18] , [19] and [20] . Dada la ingente cantidad de datos que se han generado como soporte de esta, dichas técnicas han sido en este caso prácticamente indispensables para la eficiente y rigurosa interpretación de los resultados propuestos. El manejo de grandes volúmenes de datos es una cuestión a la orden del día en muchas investigaciones, como ponen de manifiesto recientemente Reyes et al. [20] . Por este motivo, este tipo de métodos numéricos orientados al manejo de muestras sumamente extensas y a la extracción de información significativa de las mismas parece llamado a asumir un papel cada vez más relevante en las investigaciones ingenieriles.

1.1. Elementos de la teoría clásica

Correspondence: Jaime Cervera (jaime.cervera@upm.es), J. Ortiz (jesusmaria.ortiz@upm.es), M. Vázquez (mariano.vazquez.espi@upm.es), A. Aznar (antonio.aznar@upm.es).

1.1.1. Carga crítica

El problema de la *carga crítica* de Euler está descrito y resuelto en múltiples textos desde la publicación original [10]. Sumariamente, la ecuación diferencial del equilibrio de una barra inicialmente recta, de longitud l, sección de inercia I en la dirección relevante, y material de módulo de rigidez (de Young) E, y curvada bajo la acción de una carga axial N_k es:

$$M = N_k y = -EIy'' ; \tag{1}$$

cuya solución es una sinusoide cuando la carga N_k es numéricamente igual a la rigidez momento/flecha de la pieza:

$$y = esin\frac{\pi nx}{l}; \quad N_k = K_{M,\delta}; \quad K_{M,\delta} = \frac{EIn^2\pi^2}{l^2} \tag{2}$$

siendo n el número de ondas de la deformada: a cada n corresponde un modo de pandeo diferente, con $K_{M,\delta}$ mínima para $n = 1$; adoptamos por ello el convenio de sustituir l/n por l, designando ahora por l la longitud que media entre 2 puntos de inflexión consecutivos de la deformada, la *longitud de pandeo*, que elegimos para el primer modo de los posibles.

Si observamos la carga crítica en términos de tensión o de deformación unitaria, obtenemos la *tensión crítica* y la *deformación crítica:*

$$\sigma_k = \frac{EI\pi^2}{Al^2} = \frac{EAi^2\pi^2}{Al^2} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}; \quad \epsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \tag{3}$$

donde i es el radio de giro de la sección, y λ la esbeltez mecánica de la pieza, $\lambda = l/i$.

Para una barra perfectamente recta en la que el límite elástico del material utilizado —designado por la correspondiente tensión (o deformación)— sea σ_e (ε_e), si resulta que $\sigma_e > \sigma_k$ ($\varepsilon_e > \varepsilon_k$), la barra es más resistente que rígida y fallará por pandeo, mientras que si $\sigma_e < \sigma_k$ ($\varepsilon_e < \varepsilon_k$), la barra es más rígida que resistente, por lo que fallará por aplastamiento. El límite entre ambas situaciones aparecería para $\varepsilon_e = \varepsilon_k$, lo que sucede con esbelteces: $\lambda_0 = \sqrt{\pi^2/\epsilon_e}$. Tal esbeltez λ_0 se denomina en diversos textos *esbeltez de Euler o esbeltez base* y, para los aceros S235, S275 y S355, adopta los valores 29,7, 27,5 y 24,2 respectivamente. Aunque en situaciones cercanas a la esbeltez base el pandeo involucra condiciones locales de plastificación, tratándose por tanto de situaciones de pandeo elastoplástico, no las analizamos por ahora en este somero repaso, al resultar de más relevancia la existencia de imperfecciones, que abordamos a continuación.

1.1.2. Comprobación de piezas: ampliación de deformación

Aun con tensiones $\sigma_e < \sigma_k$ hay diferencia importante de resistencia en función de la esbeltez de la pieza, lo que indica que persiste la influencia de la inestabilidad. Ni las barras reales son absolutamente rectas, ni las cargas están completamente centradas, por lo que los defectos iniciales —incluso los ocultos a la vista— exigen que el equilibrio se establezca en una situación deformada diferente de la correspondiente a una forma ideal de la pieza: los defectos de forma iniciales se amplían bajo la carga.

Suponemos los defectos representados por una geometría inicial —en la situación no deformada— sinusoidal, definida por su máxima ordenada e_0. Dicha curva crece, o se amplifica —manteniendo la ley— por la aplicación de la carga axial, hasta alcanzar una ordenada máxima e.

Para dicha barra imperfecta, el defecto de forma inicial interviene en la excentricidad total y por ello en el valor del par actuante, pero no interviene en la respuesta, que solo depende del incremento de curvatura respecto de la inicial sin carga, incremento que es proporcional al aumento de flecha $e - e_0$.

La situación de equilibrio se dará cuando para cualquier posición x se igualen acción y respuesta, tal como establece Young [12]:

$$\begin{gathered} M = -EI(y - y_0)'' \\ K_{M,\delta} \quad \delta \quad sin\frac{\pi x}{l} = Nesin\frac{\pi x}{l} \\ K_{M,\delta}(e - e_0) = Ne. \end{gathered} \tag{4}$$

Si $N < K_{M,\delta}$ la flecha crecerá hasta un valor e en el que la respuesta sea igual a la solicitación, pero si $N \geq K_{M,\delta}$ no es posible el equilibrio y la barra romperá.

Para todo $N < K_{M,\delta}$ puede obtenerse la flecha de equilibrio —o flecha ampliada—:

$$\begin{gathered} e = e_0\frac{K_{M,\delta}}{K_{M,\delta} - N} = e_0\frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma} = e_0\frac{\epsilon_k}{\epsilon_k - \epsilon}, \quad omejor: \\ e = e_0\frac{1}{1 - N/K_{M,\delta}} = e_0\frac{1}{1 - \sigma/\sigma_k} = e_0\frac{1}{1 - \epsilon/\epsilon_k}. \end{gathered} \tag{5}$$

Puede por tanto peritarse la barra para dicha deformación, en la que se halla sometida a flexión compuesta de esfuerzo axial N y momento máximo $M = Ne$, mediante la condición de resistencia:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{eN}{W} = \frac{N}{A} + \frac{eNv}{I} = \frac{N}{A}\left(1 + e\frac{v}{i^2}\right) \leq f \tag{6}$$

donde v es la distancia del centro de gravedad de la sección a su fibra extrema. El resultado es que la barra colapsa para una tensión media aparente $\sigma_{med} = N/A$ menor que la de rotura del material, pero determinable en piezas concretas, conocidas.

1.1.3. Proyecto: factor de (reducción de) pandeo

Resulta cómodo reescribir la expresión anterior usando el factor $\omega = \sigma_{max}/\sigma_{med}$ de aumento de tensión respecto de la media, que permita obtener directamente la tensión máxima $N\omega/A$, y tratar además de predecir o acotar sus valores, para poder proyectar. Tal factor o coeficiente de aumento de tensión se ha denominado tradicionalmente *factor de pandeo*, si bien la perspectiva de *aumento de tensión* aplicada a dicho factor no expresa con rigor los casos de pandeo elastoplástico, en los que el cociente entre tensión media y máxima no equivale al cociente entre resistencia en pandeo frente a resistencia por aplastamiento, que es realmente el fenómeno de reducción de la capacidad de carga regido por la rigidez que se trata de describir. Una posibilidad alternativa, por ello, es considerar el efecto de reducción de resistencia de la pieza real constatado en ensayos, que posteriormente se ajustará al anterior modelo teórico u otro equiparable, que es el enfoque que el Código Técnico de la Edificación recoge del Eurocódigo 3. Este sigue el formato iniciado por la Convención Europea de la Construcción Metálica (CECM), creada en 1955, que propone en 1970 varias curvas para un factor que cuantifique dicha menor capacidad de carga que, en formato adimensional, se simbolizó entonces con $\bar{N}$ [14] y que ha pasado a simbolizarse finalmente con χ.

En todo caso resulta indiferente imaginar que ω procede de este enfoque, con $\omega = 1/\chi$, formato que es el que se usa aquí dado que las expresiones algebraicas resultan más sencillas: los sumandos resultantes en ω aparecen en el numerador, mientras que aquellos otros en χ están en el denominador. Hay que recordar de todos modos que cualquiera de las 2 aproximaciones pierde el concepto de la excentricidad con que actúa la compresión, que debe recuperarse de la ecuación (6) resultando:

$$e = \frac{W(\sigma_{max} - \sigma_{med})}{N} = \frac{W}{A}(\omega - 1) \tag{7}$$

que en la perspectiva elástica llevaría a $e = \frac{i^2}{v}(\omega - 1)$. Un caso típico aparece cuando el máximo de la onda se da en una unión que debe dimensionarse para resistir la correspondiente carga excéntrica, como es el caso de un soporte en ménsula.

De cara al proyecto es necesario predecir los valores de ω o χ para las series habituales de piezas. Desde Aryton y Perry [8] o más tarde Dutheil [9] se busca anticipar el resultado de la comprobación (6) en su versión elástica o plástica, considerando (5) junto con valores acotados para e_0 , o su variante adimensional dependiente del tipo de sección $e_0A/W = e_0v/i^2$.

En el rango elástico, llamando σ a la tensión media N/A , y estableciendo como tensión de comprobación σ_e la máxima tensión derivada de la flexocompresión $\sigma\omega$ resulta:

$$\sigma_e = \sigma\left(1 + e_0\frac{1}{1-\epsilon/\epsilon_k}\frac{v}{i^2}\right) \leq f, \tag{8}$$

de donde, sustituyendo ε_k por su valor en 3 y ε por ε_e/ω :

$$\sigma_e = \sigma\omega = \sigma\left(1 + e_0\frac{1}{1-\epsilon_e\lambda^2/\omega\pi^2}\frac{v}{i^2}\right) \tag{9}$$

con ω definido por el contenido del paréntesis.

Para definir una cota máxima para e_0 podemos optar por:

- Limitar su valor en las especificaciones de diseño —considerando las imperfecciones internas no visibles como una parte de e_0 — como podría ser el caso en madera.
- Obtener estadísticamente un valor máximo probable de e_0 .

Con ello puede entonces resolverse la ecuación en ω .

La flecha inicial e_0 puede expresarse de muchas formas, que dan lugar a diferentes leyes para ω . Una formulación posible es hacer $e_0 = lt$, donde l es la longitud —de pandeo— de la pieza, y t es una fracción (un criterio de tolerancia: supone admitir defectos iniciales proporcionales a la longitud de la pieza de forma que el valor máximo de la flecha equivalente inicial quede limitado por t ; un valor típico para t es 1/350). Resolviendo ω en (9) resulta:

$$\omega = \frac{1}{\chi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}}; \quad \varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t\lambda v}{i} + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right) \tag{10}$$

donde $\lambda_0 = \sqrt{\pi^2/\epsilon_e}$. El factor de pandeo ω así obtenido relaciona la tensión máxima que puede esperarse para las excentricidades derivadas de la inestabilidad bajo la carga de cálculo frente a la tensión media de la pieza sometida a compresión simple. Puede representarse φ empleando $\dot{\alpha} = tv\lambda_0/i$, lo que constituye un coeficiente que representaría la incidencia de la tolerancia a imperfecciones de la sección considerada, resultando:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \dot{\alpha}\frac{\lambda}{\lambda_0} + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right).$$

Si consideramos criterios elastoplásticos, una expresión semejante establece la relación entre la carga de aplastamiento de la pieza y la carga de rotura real para las condiciones de pandeo representadas. Considerando este tipo de criterios, y con el objeto de asegurar una meseta plana para χ en los casos de esbelteces relativas $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$ menores que 0,2, las expresiones del Eurocódigo de acero o del CTE sustituyen la anterior forma de φ por la siguiente:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \alpha\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 0,2\right) + \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}\right), \tag{11}$$

donde α , denominado *coeficiente de imperfección* , se obtiene, de acuerdo con Maquoi y Rondal [14] , ajustando las ya citadas curvas experimentales adoptadas por la CECM, y vale 0,13 0,21 0,34 0,49 o 0,76, en la versión de CTE para las cinco *curvas de pandeo* a_0 , a , b , c , d , según el tipo de sección.

De esta última expresión puede obtenerse la esbeltez ligada a un factor de pandeo dado:

$$\bar{\lambda}(\omega, \alpha) = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{\omega^3 + (0,2\alpha + (\alpha/2)^2 - 2)\omega^2 + (1 - 0,2\alpha)\omega} - \alpha\omega/2}{\omega - 1} \tag{12}$$

Para la curva c , habitual en edificación [2] , se obtiene muy buen ajuste, tal como se ve en la figura 1 , con $\omega = 1 + (\lambda/\lambda_{\omega=2})^{2,2}$ siendo $\lambda_{\omega=2}$ la esbeltez para la que $\omega = 2$, a saber, 100,9 para S235, 93,3 para S275 y 82,1 para S355. Si consideramos el problema desde la perspectiva de su solución, comparando la resistencia de la pieza sin pandeo, dada por A , que determina las tensiones medias destinadas a resolver la compresión simple, dadas por N/A , frente a la resistencia necesaria para el problema completo real, dada por $\chi A = A/\omega$, vemos que se puede interpretar $\chi = 1/\omega$ como la fracción de resistencia destinada a resolver la compresión, y $1 - \chi = 1 - 1/\omega$ como la fracción destinada a resolver la flexión de pandeo. Desde la perspectiva del problema, el problema completo está representado por ω , siendo 1 la parte destinada a resolver la compresión simple, y $\omega - 1$ la parte destinada a estabilizar la excentricidad que, siguiendo 7 , viene dada por $(\omega - 1)W/A$. De este modo, $\omega = 1/\chi$ es también el factor de sobrecoste necesario para asegurar la estabilidad.

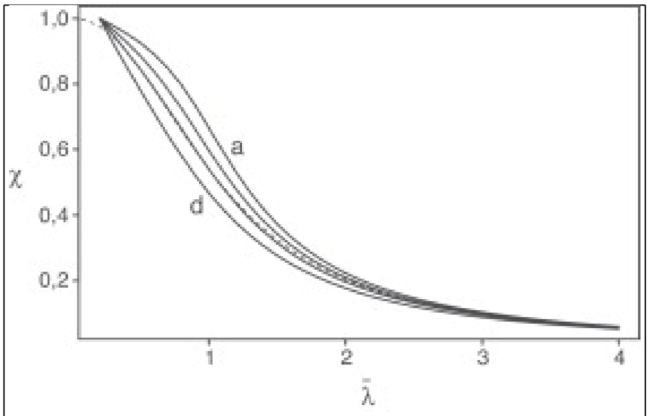


Figura 1.

Curvas de pandeo a, b, c, d, y aproximación.

1.2. Sobre la pertinencia de proponer mejoras para el proyecto

Aunque los resultados de las anteriores formulaciones permiten proyectar, el proceso necesario es inevitablemente iterativo: la no linealidad de las expresiones involucradas y la necesidad de selección previa de una sección para poder aplicarlas impiden conocer a priori el factor χ , o su versión inversa ω .

La inconveniencia de este proceso iterativo para la decisión resulta evidente en numerosas situaciones, particularmente cuando se trata de aproximar numérica o mentalmente el efecto del pandeo en tomas globales de decisión, sea sobre formas, tipos de sección, incidencia de las decisiones en las uniones, etc. Para estas actividades resulta casi imprescindible contar con la *experiencia* (podríamos llamarla en este contexto *conocimiento previo estadístico no formalizado*). No tener necesidad de iterar, tener modelos directos, resulta de máxima utilidad cuando se trata de formalizar ese efecto para un análisis de tipo más global, como podría ser la estimación de los costes previsibles de un nuevo enfoque constructivo. En todo caso, evitar o reducir fuertemente la iteración puede aportar no solo una mayor eficiencia a los procesos numéricos sino, fundamentalmente, más facilidad y rigor para la percepción del problema. Por ello se dedicarán las secciones siguientes a dicho empeño.

2. Identidad entre problemas de pandeo

Para tratar de identificar rápidamente la pieza correcta para un problema dado debemos considerar la separación entre las condiciones del problema, dadas por l y N , respecto de las de la solución, dadas por la pieza que lo resuelve, de sección A , i , con material σ_e , cuya resistencia resultará «desaprovechada» en la solución final en la medida de ω .

La observación de Aroca, que hace unos 30 años mostraba la existencia de condiciones de proporcionalidad entre las soluciones a diferentes problemas de pandeo, puede expresarse de la forma siguiente, usando los símbolos ya definidos en apartados anteriores:

$$\frac{l^2}{N} = \frac{l^2}{A\sigma} = \frac{\omega l^2}{A\sigma_e} = \frac{K\omega l^2}{i^2\sigma_e} = \frac{K}{\sigma_e}\omega\lambda^2 \qquad (13)$$

ecuación en la que se usan los valores de cálculo de N y σ , y en la que se utiliza $K = \frac{i^2}{A}$, donde i es el radio de giro de la sección de área A , y que resulta ser constante en secciones diferentes pero que mantengan relación de semejanza. El adimensional K resulta ser bastante estable para cada serie de perfiles y es fácil comprender que es un buen indicador de la eficiencia de la serie para enfrentar problemas de rigidez. Dada la relación biunívoca entre ω y λ para $\lambda \geq 0,2$ puede escribirse $\lambda = \lambda(\omega)$, como en (12) , resultando de (13) una relación inmediata entre el problema de diseño medido por l^2/N y el factor de pandeo ω , para cada material σ_e y tipo de sección K , es decir, $\omega = \omega(P)$, con $P = \sigma_e l^2/KN$. La figura 2 muestra la forma de dicha relación para las 4 curvas de pandeo habituales, aunque se enfatiza la c , aplicable en edificación. Con más detalle para factores bajos en la figura 3 .

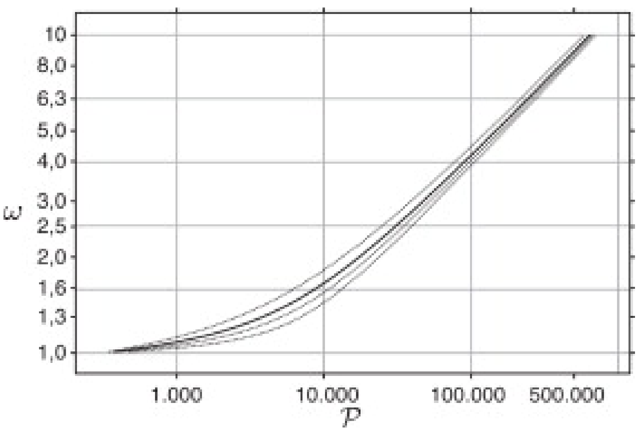


Figura 2.

Problema P y factor de pandeo ω .

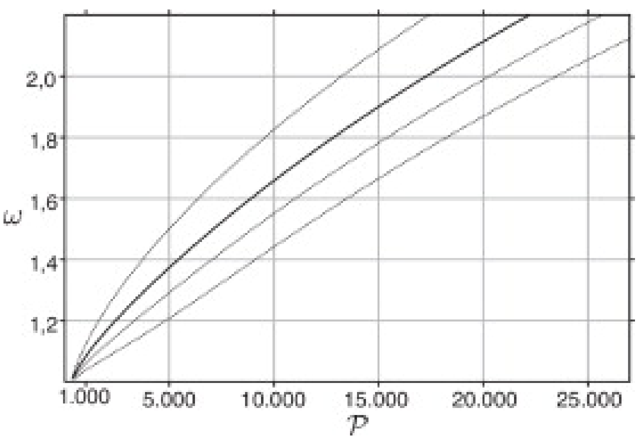


Figura 3.

Problema P y factor de pandeo ω . Detalle.

Resultará por dicha relación que, desde la perspectiva del efecto de pandeo, y por distintos que pudiesen parecer, todos los problemas para los que la cualidad $\sigma_e l^2/KN$ sea idéntica, resultarán idénticos —de igual efecto—. Cabe señalar que esto implica que, una vez elegido el material y el tipo de sección que fijan σ_e y K , el problema —el factor de pandeo— queda definido exclusivamente por el cociente l^2/N , independientemente de los valores aislados de l o N , resultando por tanto idénticos todos los problemas que comparten igual cociente.

3. El *peso* del pandeo

Podemos hacer explícita la expresión $\omega\,(l^2/N)$ usando $\lambda = \lambda(\omega)$, como en (12) y sustituyendo en (13) resolviendo para ω . Si consideramos en dicho tipo de expresiones el posible desarrollo en serie de ω en función de l^2/N, para σ_e, K dados, tendremos inmediatamente expresiones de ω de la forma:

$$\omega \approx 1 + \beta \frac{l^2}{N} + \gamma \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{N}\right)^2 + \ldots \qquad (14)$$

Conservando los primeros términos del desarrollo, las expresiones de comprobación $N\omega/A \leq \sigma_e$ se aproximarán en valores bajos de ω con:

$$(N + \beta l^2 + \ldots)/A \leq \sigma_e \qquad (15)$$

Esto permite estimar el efecto del pandeo por el equivalente al que produciría una carga centrada adicional $\beta l^2 + \ldots$, de fácil aproximación si se conoce β, un valor de cálculo con unidades de presión. La anterior aproximación equivale a estimar la necesidad adicional de resistencia en la pieza para estabilizar el efecto de la flexión de pandeo por el efecto equivalente de la resistencia adicional necesaria para soportar una carga adicional $\beta l^2 + \ldots$: el *peso* del pandeo, donde usamos el vocablo *peso* en el sentido de *ponderación*, de efecto, aunque medible por un valor que tiene unidades consistentes con las habituales para dicha palabra.

Para desarrollar esta idea usamos la expresión del CTE, con $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$, expresión de la que diferenciando, empleando $\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{l^2\sigma_e}{NK\lambda_0^2}\right) = \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\bar{\lambda}^2)$, y considerando K suficientemente constante para una gama dada de secciones, de modo que $\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{l^2\sigma_e}{NK\lambda_0^2}\right) = \frac{\sigma_e}{K\lambda_0^2}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{l^2}{N}\right) = \frac{\sigma_e}{K\lambda_0^2}\frac{1}{\beta(\omega)}$, puede deducirse sucesivamente:

$$\bar{\lambda}^2(\omega - 1) + \omega(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2)) - \omega^2 = 0$$
$$\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\omega} = \frac{2\omega - \bar{\lambda}^2 - 1 - \alpha(\bar{\lambda} - 0,2)}{2\bar{\lambda}(\omega - 1) + \alpha\omega} \qquad (16)$$

$$\frac{K\lambda_0^2}{\sigma_e}\beta(\omega) = \frac{\partial w}{\partial\left(\frac{l^2\sigma_e}{NK\lambda_0^2}\right)} = \frac{\omega - 1 + \alpha\omega/(2\bar{\lambda})}{2\omega^2 - \omega - \bar{\lambda}^2 + 0,2\alpha\omega - \alpha\omega\bar{\lambda}/2} \qquad (17)$$

con $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\omega, \alpha)$.

Debe emplearse como coeficiente β del desarrollo en serie su valor en algún punto. El puro desarrollo de Taylor elige el punto para el que $\omega = 1$. Desarrollos alternativos empleados con éxito para expresiones del factor de pandeo en función de la esbeltez anteriores a las aportadas por los Eurocódigos, eligen el punto para el que $\omega = 2$. Mejor que alguno de los anteriores, $\omega = 1$ ($\bar{\lambda} = 0,2$), o $\omega = 2$ ($\bar{\lambda} = \lambda_{\omega=2}/\lambda_0$), tomamos el punto correspondiente a la aproximación secante, para $\omega = 1,3$ y $\bar{\lambda} = 0,629$, con el que se obtiene, para la curva de pandeo habitual en edificación, el valor ajustado y redondo[3]:

$$\beta = 0,5\frac{\sigma_e\epsilon_e}{\pi^2 K}. \qquad (18)$$

Una rápida aplicación de la expresión recién obtenida nos aporta los valores aproximados siguientes, para β en valor de cálculo, y en kN/m^2:

La tabla 1 nos permite estimar el *peso del pandeo* con rapidez para los casos representados de material y tipo de sección, lo que permite predecir de inmediato la pieza necesaria para un problema de compresión dado.

Tabla 1. Valores de β: peso «unitario» de pandeo, en kN/m^2

2xUPN		HEB	Tubo # C		Tubo O	
cajón		⩽500	d/20	d/10	d/20	d/10
S235	27	42	17	35	18	37
S275	36	58	23	48	24	51
S355	61	97	39	80	41	85

Por otro lado, y como ya se apuntaba en relación con el significado de (7), $\omega - 1$ determina la excentricidad máxima de la flexión por pandeo, de modo que usando nuestra aproximación tendremos

$$\frac{N\omega}{A} \approx \frac{N}{A}\left(1 + \beta\frac{l^2}{N}\right)$$
$$e = \frac{W}{A}(\omega - 1) \approx \frac{W}{A}\left(\beta\frac{l^2}{N}\right) \qquad (19)$$
$$M = Ne \approx \frac{W}{A}\beta l^2$$

con lo que también podemos interpretar el *peso del pandeo* desde el efecto de la flexión que induce, sin más que multiplicarlo por el cociente W/A correspondiente a la solución obtenida para resolver el problema.

Otra interpretación interesante aparece si consideramos los valores del módulo resistente de referencia para el plano de pandeo en función del área y la *anchura* o lado de menor rigidez del perfil: $W = \varphi Ab$. φ oscila entre el mínimo posible de 1/8 en secciones circulares macizas en régimen elástico, y el máximo posible de 1/2 en secciones con toda el área concentrada en la máxima separación disponible. Sustituyendo en (19) tenemos una interesante proporción entre la excentricidad por pandeo y el lado del perfil:

$$\frac{e}{b} = \varphi\beta\frac{l^2}{N} \qquad (20)$$

Para piezas sometidas a flexocompresión en el plano de pandeo, N, M, podríamos igualmente obtener una expresión aproximada del lado de la seguridad considerando en el momento final actuante la suma de la componente M con el momento adicional derivado del pandeo $\beta l^2 W/A$.

En el siguiente apartado se hará una validación estadística del modelo para piezas habituales de edificación.

4. Validación estadística del modelo: simulación

Para revisar el ámbito de validez del modelo se realiza una comparación de sus predicciones con las que resultan de la aplicación estricta de las expresiones actualmente aceptadas por la normativa vigente: el CTE DB SE-A.

Se generan para ello, recordando técnicas del método de Monte Carlo, 2 simulaciones para 2 conjuntos representativos: el primero, de pilares de edificación; el segundo, de barras de cerchas. Las correspondientes distribuciones y los resultados obtenidos para ellas, generados con auxilio de R [18], se detallan a continuación.

4.1. Pilares de edificios

Para generar una distribución representativa de pilares de edificación, se ha generado una distribución de 10.000 pilares de edificios prismáticos. Los edificios se eligen para una distribución binomial acotada en 10 pisos de probabilidad 0,6, eligiendo pilares de cualquiera de las plantas, con probabilidad uniforme. Las luces y separaciones entre pórticos que determinan las cargas sobre dichos pilares se eligen con distribuciones normales centradas en 5,5 y 5,0 m respectivamente, con desviaciones estándar de 1,3 y 1,2 m respectivamente, y truncadas inferiormente en 2,5 m.

Las cargas se definen a través de una distribución de Weibull, de forma 2 y escala 2, con la expresión, en kN/m^2 , q = 6,5 + 0,5 W (2, 2)/1,75. La altura de pandeo se define, finalmente, en la forma l = 2,5 + 0,5W (2,2)/1,75. Más adelante, en la figura 9 puede observarse la distribución resultante en términos de carga N y altura l .

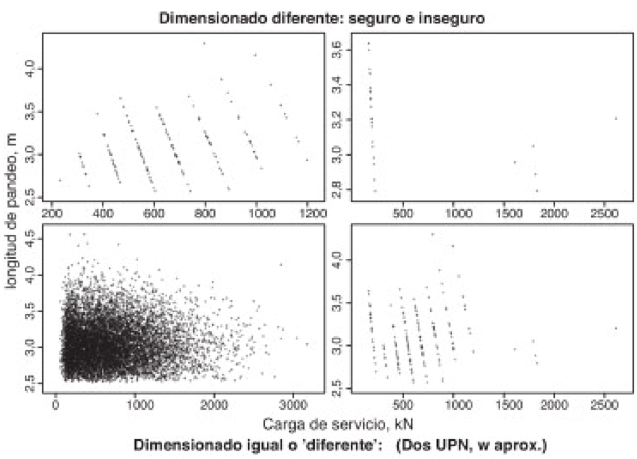


Figura 9.

Aproximación con ω -ap, carga y altura: caso UPN ω -ap.

Para todos los pilares generados en dicha distribución se obtienen los dimensionados necesarios aplicando los criterios de CTE, y se comparan con los que se obtienen aplicando diversos criterios de aproximación, que incluyen los obtenidos en el apartado anterior. Las figuras Figura 4 , Figura 5 , Figura 6 , Figura 7 and Figura 8 muestran para los distintos criterios aproximados los histogramas de los coeficientes de utilización del acero correspondientes a los resultados obtenidos, separados en tres partes, a saber los casos en que la aproximación aporta dimensionados diferentes, bien del lado de la seguridad o en contra de ella, o idénticos a los dimensionados estrictamente acordes a la normativa. Las figuras 9 y 10 representan en los recuadros inferiores los casos de carga y longitud de pandeo correspondientes a dimensionados idénticos o diferentes a los de la normativa y en los superiores desglosan estos últimos entre los que se encuentran del lado de la seguridad o en contra de ella.

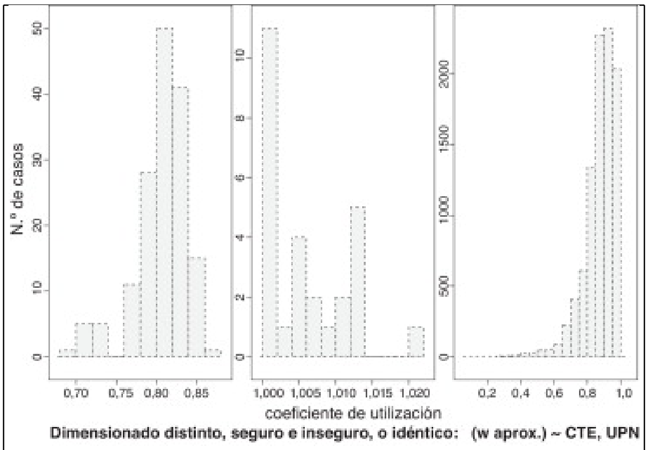


Figura 4.

Aproximación con $\omega(\lambda) \approx 1+(\lambda/\lambda_{w=2})^{2,2}$: caso UPN ω -ap.

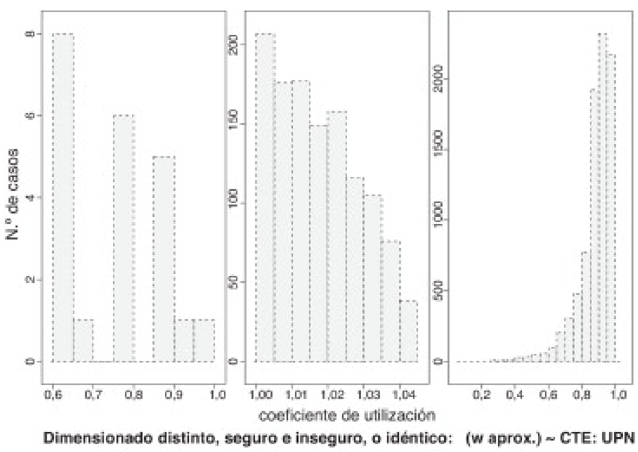


Figura 5.

Aproximación con $\omega(\lambda) \approx 1 + (\lambda/100)^3$: caso UPN ω -obs.

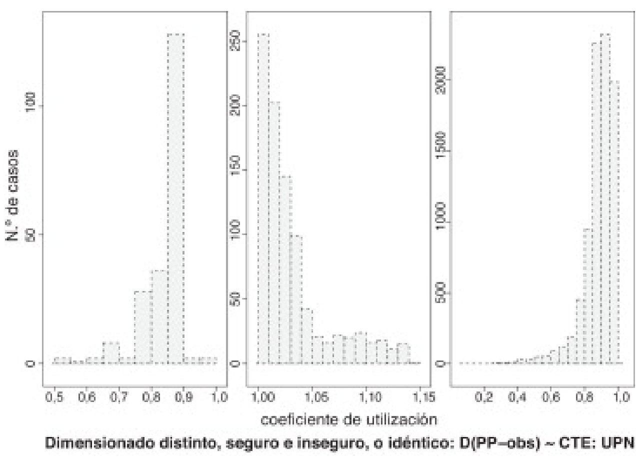


Figura 6.

Dimensionado *PP-obs* , con UPN en cajón.

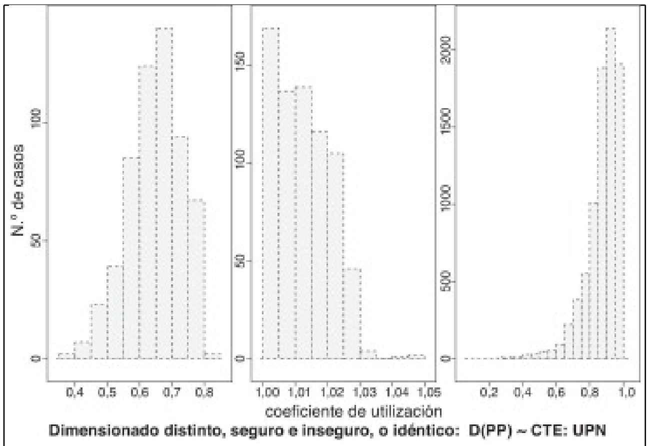


Figura 7.

Dimensionado propuesto en este texto: caso UPN PP.

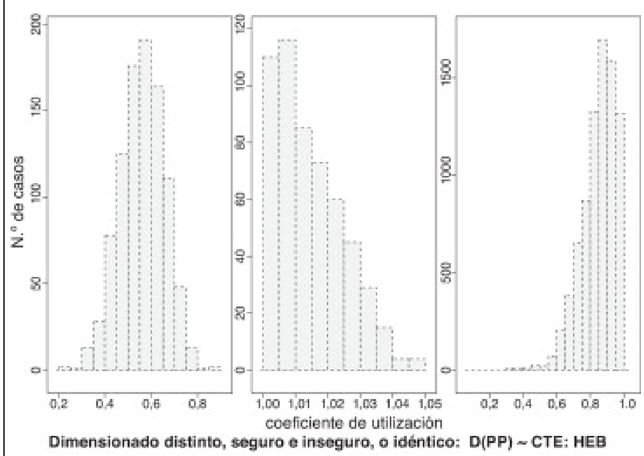


Figura 8.

Dimensionado propuesto en este texto: caso HEB PP.

Se han considerado piezas de acero S275, coeficientes de mayoración de cargas de acuerdo a CTE, considerando 2/5 de carga permanente y 3/5 de sobrecarga, así como las cualidades tabuladas estándar de los perfiles laminados utilizados.

La tabla 2 presenta un breve resumen de los criterios empleados, y los dimensionados obtenidos, para UPN en cajón o perfiles HEB. Para todos los criterios de dimensionado que se describen más abajo se aporta el número de casos resuelto —tras eliminar los de las dimensiones truncadas en la distribución así como los casos imposibles de resolver con dicho criterio y las secciones disponibles—, la tensión de referencia usada para dimensionar en newtons por milímetro cuadrado, el peso total en toneladas de acero requeridas para el conjunto, así como los valores medio y máximo del coeficiente de utilización del material cuando se comprueba el correspondiente dimensionado, sea cual sea la forma en que se haya obtenido, con los criterios estrictos de CTE —usando la curva de pandeo c y la resistencia de cálculo del acero S275—.

Tabla 2. Comparativa de dimensionado de pilares

Criterio Dim.	No	f_{yd}	Peso	coef $_{uso}$	
				medio	máximo
UPN	9671	27,5	1.216	0,877	1,000
UPN ω -ap	9673	27,5	1.219	0,874	1,021
UPN PP	9673	27,5	1.210	0,872	1,046
UPN ω -obs	9670	25,0	1.192	0,900	1,043
UPN PP-obs	9670	25,0	1.207	0,897	1,141
HEB	9676	27,5	1.406	0,849	1,000
HEB ω -ap	9676	27,5	1.409	0,850	1,034
HEB PP	9676	27,5	1.414	0,830	1,049
HEB ω -obs	9676	25,0	1.380	0,868	1,044
HEB PP-obs	9676	25,0	1.367	0,901	1,212

Hay 5 criterios de dimensionado para cada tipo de sección:

- Uso riguroso de criterios de CTE.
- Uso de criterios de CTE usando la expresión aproximada para el factor de pandeo definida al final del apartado 1.1.3 , (ω -ap).
- Dimensionado a través de la aproximación propuesta en el apartado 3 como *peso del pandeo* (PP).

Se añaden para contraste 2 criterios adicionales que parten de las aportaciones de Aroca y De Miguel y que han adquirido cierto nivel de uso en la Escuela de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid [3, pág. 266 ss.] , pero que resultan obsoletos en la actualidad tras el cambio normativo:

- El primero de ellos usa una expresión aproximada y ya clásica para ω , a saber: ω = 1 + (λ /100)^3 . Dicha aproximación se basaba en los criterios de la antigua norma de acero española, y se ajustaba excelentemente a estos para acero A42 (ω -obs).
- El segundo usa una expresión de dimensionado de estructura idéntica a la aquí propuesta, preparada igualmente para el acero A42 partiendo de las tablas del factor de pandeo de las antiguas normas MV103 y EA95. De acuerdo con esta aproximación, se dimensiona en resistencia para una carga de efecto equivalente N_{eq} = N + αl^2 usando valores tabulados de α obtenidos a partir de la pendiente de la curva de pandeo en función de l^2 /N en ω = 2 (PP-obs).

Estos 2 últimos procedimientos se han aplicado de acuerdo a sus propios criterios y, por tanto, dimensionando con tensiones «en servicio» de 18 kN/cm^2 , de modo que en estos casos no se ha tratado de aprovechar para dimensionar toda la resistencia del acero S275: las tensiones máximas de cálculo consideradas que resultan son solo de 25 kN/cm^2 frente a los 27,5 posibles.

En la exploración se han obtenido los siguientes resultados:

- Los casos de dimensionado diferente comparando el uso de la expresión aportada para el factor de reducción por pandeo en CTE con la aproximada por $\omega = 1 + (\lambda/\lambda_{w=2})^{2,2}$ son mínimos (no alcanzan el 2% de los casos totales con UPN o el 2,5 con HEB) y la distribución de error en el coeficiente de utilización (carga/carga máxima) muestra que la mayor parte de dichos errores están del lado de la seguridad: con UPN solo hay 8 casos con sobretensión mayor al 1%, aunque siempre menor o igual al 2,5% de entre las 27 soluciones diferentes que resultan ser estrictamente inseguras. Con HEB, aunque 44 casos superan el 1% de sobretensión solo 9 casos superan el 2,5%, todo ello entre los más de 9.600 analizados.
- Resulta claramente peor el número de casos de dimensionado no coincidente usando la aproximación para ω : ω = 1 + (λ /100)^3 . Dicha aproximación se ajustaba excelentemente a la antigua normativa, pero no lo hace ya

con tanta precisión a la normativa actual, por lo que se aconseja abandonarla a la vista del mejor ajuste de la anterior.

- Se da un ajuste moderado usando la expresión de predimensionado identificada más arriba como PP-obs. Aunque el ajuste resulta bastante razonable, los casos de dimensionado inseguro son relativamente numerosos y lo serían más si se usaran rigurosamente las características del S275. Se aconseja abandonar los valores usados con dicha expresión y sustituirlos por los aquí propuestos.
- Finalmente resultan de limitada importancia los casos de dimensionado no coincidentes entre el modelo aproximado propuesto en el apartado 3 anterior, frente al empleo estricto de los criterios de CTE. Puede observarse en la figura 10 y en la tabla 3 el excelente ajuste resultante para una expresión tan extremadamente sencilla como la propuesta: aunque los casos con dimensionado diferente alcanzan el 13,5 o el 15% (con UPN o HEB), cerca de la mitad de ellos, es decir solo un 7,4 o un 6% respectivamente del total, corresponden a dimensionados levemente inseguros, pero tan *levemente* , que solo 7 o 52 casos respectivamente suponen un exceso sobre el coeficiente de uso superior al 3%, no sobrepasándose el 5% de exceso en ningún caso. El sobrepeso en acero de los dimensionados excesivamente seguros respecto de los necesarios para las correspondientes soluciones correctas es de un 23 o 27% respectivamente (por ejemplo, en el caso de UPN en cajón, de 51,899 T de acero frente a las 42,179 T que supondría el dimensionado exacto con CTE), pero dicho sobrepeso es solo una mímina fracción del peso del conjunto de las soluciones obtenidas (un 0,8% de las 1.210 T para el total de las soluciones evaluadas en el ejemplo). El ajuste en peso en el conjunto de las soluciones obtenidas para cualquiera de las 2 formulaciones aportadas frente a la solución determinada aplicando estrictamente los criterios de CTE resulta excepcional (pocas milésimas de error para la comprobación tanto con la aproximación de ω como con la aproximación a través del *peso* del pandeo). Cabe señalar además que el impacto del uso de esta expresión resulta menor que el derivado de la opción, establecida por norma, de seleccionar una u otra de las curvas de pandeo y sus correspondientes *coeficientes de imperfección* , frente a la menor variabilidad que permitiría una determinación más precisa de estos a partir de la excentricidad adimensional inicial para la pieza que corresponda a la sección concreta empleada, de acuerdo con los procedimientos reseñados en el apartado 1.1.3 . Puede observarse que las expresiones propuestas más sencillas resultan seguras para cualquier condición a la que corresponda un elevado factor de pandeo, y son muy acertadas para valores estimados para dicho factor menores de 2,5.

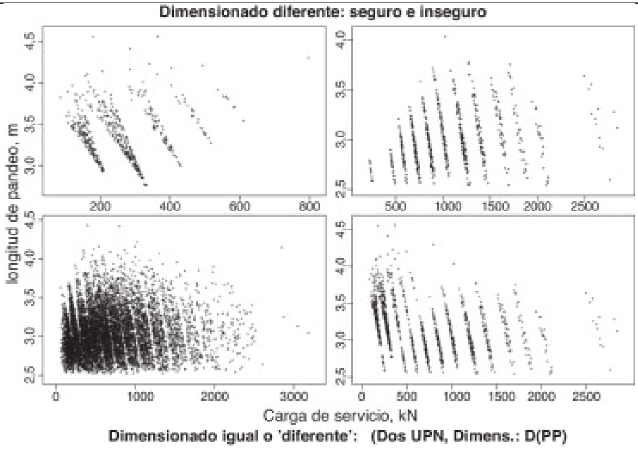


Figura 10.

Dimensionado aproximado propuesto: casos de carga y altura.

Tabla 3. Comparativa de dimensionados (casos y pesos, en toneladas de acero)

No	UPN		HEB	
Peso	**ap** PP	**CTE**	**ap** PP	**CTE**
Total	9673	9671	9676	9676
	1.210,1	1.216,1	1.413,9	1.406,2
Inseguro	721		541	
	114,9	131,7	85,8	100,8
Inseg >3%	7		52	
	2,2	2,4	6,2	7,5
Sobreseguro	583		953	
	51,9	42,2	108,1	85,4

4.2. Barras de cerchas

Para revisar la aplicación de la expresión a diferentes variantes de barras comprimidas en cerchas, se ha establecido igualmente una distribución de potenciales cerchas de cubierta, de luces entre 10 y 36 m, generada con una distribución gamma que presenta los valores siguientes:

Mín.	25%	50%	Media	75%	Máx.
10,21	14,74	18,32	19,43	22,95	35,98

Los cantos máximos se han definido eligiendo una distribución de esbelteces uniforme en torno a valores que oscilan entre 15 ± 5 para las luces cortas y 20 ± 3 para las largas, y con cantos en apoyo entre dicho valor y su mitad, suponiendo horizontal el cordón inferior.

Se han considerado como elementos comprimidos relevantes el tramo de cordón central superior, así como el segundo tramo de diagonal, considerando traccionado el más cercano al apoyo.

Se han considerado valores ligeros de cargas de cubierta (valores característicos de entre 2,5 y 3 kN/m^2) para separaciones entre cerchas de entre 1/5 y 1/3 de su luz.

Con dichos criterios se han generado 2.000 casos de cerchas, y se ha procedido al dimensionado de las 4.000 barras seleccionadas. Para el dimensionado, y a efectos de tratar la condición más desfavorable al posible ajuste en el dimensionado aproximado, se ha optado por analizar las soluciones realizadas con sección de tubo rectangular (norma UNE EN 10219-2-98) empleando alternativamente los criterios de CTE o los aproximados para longitudes de pandeo iguales a la distancia entre nudos, considerando el pandeo en el plano de inercia débil de los tubos.

En la aplicación de los criterios aproximados, la dificultad estriba en la selección del término de rendimiento[4] K que hay que considerar para las secciones, habida cuenta de la importante variabilidad en este dependiendo de las relaciones entre el lado del tubo y su espesor: si se considera indistintamente toda la gama disponible, la distribución de valores para K correspondiente a los tubos obtenidos dimensionando con la aplicación estricta de CTE y buscando el tubo de menor peso posible dentro de toda la gama disponible, puede resumirse en los datos siguientes:

Mín.	25%	50%	Media	75%	Máx.
0,185	0,338	0,441	0,500	0,619	1,222

Puede verse que la variabilidad resulta excesiva para poder aportar buenas previsiones si no se acierta con el término de rendimiento K . Por ello, se han contrastado dimensionados restringidos a gamas de tubos dentro de un rango acotado en la relación ancho/espesor. Para ello se han agrupado en 3 tipos, a saber: «10» para tubos con dicha relación menor a 15, «20» para los tubos en los que tal relación se sitúa entre 15 y 25, y «30» para aquellos en los que dicha relación es mayor a 25. Finalmente, y como contraste, se ha dimensionado empleando el valor de rendimiento K que corresponde al tubo seleccionado, aunque tal procedimiento no aportaría ventaja operativa a una comprobación de pandeo estándar.

Se ha contrastado el dimensionado que se produce en estas condiciones dependiendo de si se aplican las expresiones aproximadas o las exactas. Como muestra, se aportan los histogramas correspondientes al coeficiente de utilización de las soluciones obtenidas para 2 dimensionados realizados con los criterios aproximados: la primera (fig. 11) para tubos seleccionados en la gama de relación ancho/espesor entre 15 y 25, con el valor del coeficiente β que corresponde al rendimiento K medio de los perfiles de la gama; la segunda (fig. 12) para dimensionados considerando el coeficiente β que corresponde al rendimiento K preciso del tubo considerado.

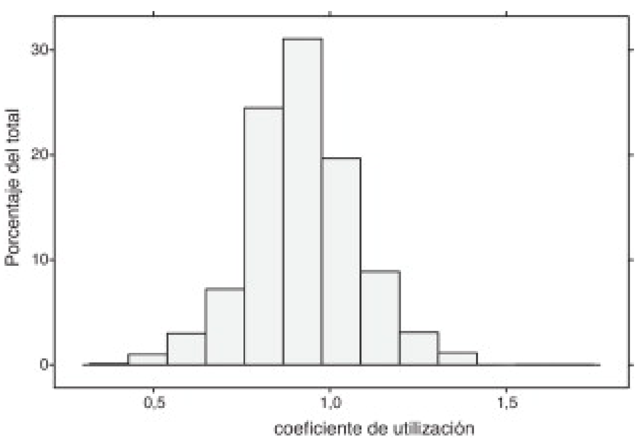


Figura 11.

Dimensionado aproximado: K estimada en gama de perfiles «20».

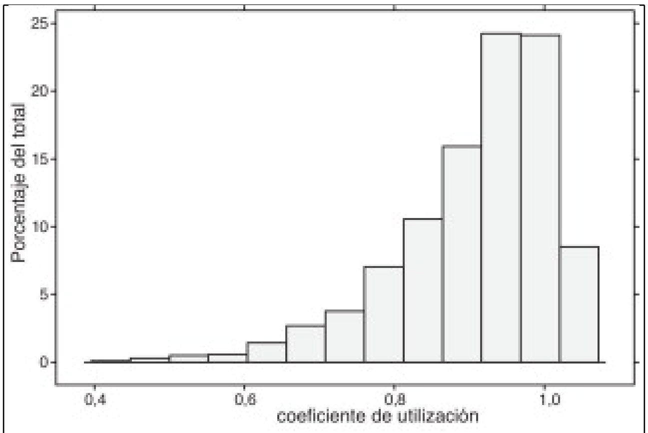


Figura 12.

Dimensionado aproximado: K Center exacto para los tubos empleados.

Puede verse en esta segunda figura que los casos inseguros son pocos (no llegan al 10% de los dimensionados), y solo la mitad de ellos supera un 2% en la inseguridad, que en ninguno de los casos supera el factor 1,05.

La conclusión es que puede determinarse un ajuste para las expresiones propuestas, y este puede llegar a ser muy bueno cuando se trabaja sobre una gama limitada de perfiles de cualidades análogas. En efecto, el ajuste puede ser excelente cuando el dimensionado se realiza empleando gamas de perfiles que presenten limitada variabilidad en el valor del rendimiento K en las secciones disponibles. Por ello la selección de la gama de tubos que se debe emplear y la *estimación* previa de su rendimiento K resulta crítica para el ajuste de estas expresiones, que solo cabe usar cuando el rango de variabilidad en dicho factor es limitado.

5. Validación probabilística de las expresiones, con aplicación de técnicas de funciones de base radial

Para fundamentar la posibilidad de aplicación de las expresiones obtenidas en el apartado anterior para el dimensionado de pilares de edificios con perfiles laminados de acuerdo con los criterios normativos definidos en el actual Código Técnico de la Edificación, en particular el DB-SE, en su Anejo C, y para facilitar el manejo de una muestra del tamaño considerado en apartados anteriores, en esta parte del trabajo se utiliza la interpolación de las frecuencias muestrales mediante *funciones de base radial* , técnica que ha sido incluida en publicaciones recientes, con el análogo objetivo de gestionar la información aportada por grandes volúmenes de datos, como se muestra en Reyes at el. [20] . Este tipo de técnicas son conocidas en otras áreas como *estimación no paramétrica de la densidad de probabilidad* o *regresión no paramétrica*[19] and [17] .

La utilidad práctica para el tratamiento de la gran cantidad de información analizada es excepcional: se consigue de un modo extraordinariamente sencillo una presentación compacta de los resultados y se posibilita la interpretación posterior de estos de una manera simple, precisa y rigurosa.

Para ello, vamos a contrastar el coeficiente χ de reducción de pandeo determinado de acuerdo con los criterios de CTE, con el estimado o implícito $\chi^{\hat{}} = 1/\hat{\omega}$ que corresponde a la aplicación de la expresión aproximada (15) en los casos de la simulación del apartado anterior.

5.1. Densidad de probabilidad del estimador del coeficiente de reducción de pandeo

Tenemos como estimador objeto de test y como variable de control las siguientes:

$$x_1 = \hat{\chi} \in (0,1],$$
$$x_0 = \frac{\hat{\chi}}{\chi}; \quad si \quad x_0 \leq 1, \quad la \quad \text{solución es segura.}$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \in R^{+} \times (0,1].$$

Al conjunto de valores procedentes de las simulaciones anteriores se aplican los núcleos normalizados siguientes:

- Gaussiano:

$$\varphi_{nor}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in (-\infty, \infty).$$

- Epanechnikov:

$$\varphi_{nor}(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2), x \in (-1,1); \varphi_{nor}(x) = 0, \ | x | \ \geq 1.$$

Núcleo en R^2 :

$$K(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=0}^{1} \frac{1}{h_j} \varphi_{nor}\left(\frac{x_j}{h_j}\right),$$

que verifica idénticamente $\int\int_I K(x) \quad dx_0 \quad dx_1 = 1$ siendo el dominio de integración $I = R^2$ para el núcleo gaussiano, e I = rectángulo de semianchos h_0 , h_1 centrado en el origen, para el núcleo de soporte finito propuesto. Con anchos de banda iguales $h_0 = h_1 = h$ el núcleo gaussiano proporciona un núcleo isótropo $K(x) = K(r) = \frac{1}{h^2} \prod_{j=0}^{1} \varphi_{nor}\left(\frac{r}{h}\right)$, $r = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$, es decir, una función estrictamente *radial* .

El siguiente es un estimador no paramétrico de la función de densidad de probabilidad sobre una muestra dada $\{x_k \mid 1 \leq k \leq N\}$:

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k).$$

Dicho estimador puede interpretarse como una suavización mediante *funciones de base radial* de la distribución muestral:

$$p_{obs}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k)$$

siendo δ la función delta de Dirac.

La elección óptima del ancho de banda unidimensional, de acuerdo con Fan y Yao [17] es, respectivamente para los núcleos gaussiano y de Epanechnikov:

- $h = 1,06 \cdot C \cdot \sigma \cdot N^{-1/5}$,
- $h = 2,34 \cdot C \cdot \sigma \cdot N^{-1/5}$, siendo σ la desviación típica muestral y C un coeficiente corrector que depende de la asimetría (γ_3) y la curtosis (γ_4) de la muestra:

$$C = \left(1 + \frac{35}{48}\gamma_4 + \frac{35}{32}\gamma_3^2 + \frac{385}{1024}\gamma_4^2\right)^{-1/5}$$

Para distribuciones asimétricas o multimodales existe el riesgo de sobre-suavizado, por lo que se recomienda ensayar anchos de banda menores. Por otra parte, las varianzas muestrales se incrementan típicamente en h^2 (según la expresión posterior 24), por lo que los valores elevados del ancho de banda tenderán a ser conservadores en los cálculos de seguridad estructural.

Para una muestra bidimensional, con carácter aproximado, cabe aplicar un factor igual a $\sqrt{2}$ a los valores de h_0 , h_1 obtenidos mediante las expresiones anteriores.

Tenemos las densidades de probabilidad marginales:

$$\hat{p}(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\boldsymbol{x}) \quad dx_1 = \frac{1}{N h_0} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{nor}\left(\frac{x_0 - x_{0k}}{h_0}\right) \qquad (21)$$

$$\hat{p}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\boldsymbol{x}) \quad dx_0 = \frac{1}{N h_1} \sum_{k=1}^{N} \varphi_{nor}\left(\frac{x_1 - x_{1k}}{h_1}\right) \qquad (22)$$

y la densidad de probabilidad condicionada:

$$\hat{p}(x_0 \mid x_1) = \frac{\hat{p}(\boldsymbol{x})}{\hat{p}(x_1)}. \qquad (23)$$

Sobre una muestra de N=19349 casos, se representan en la figura (13) las densidades de probabilidad $p\hat{}(x_0)$ (grafiada en color negro) y $p\hat{}(x_0 \mid x_1)$ para (9) valores de $x_1 = \chi\hat{} = 0,1,0,2,...,0,9$ (los valores más bajos de x corresponden a las curvas con modas menores).

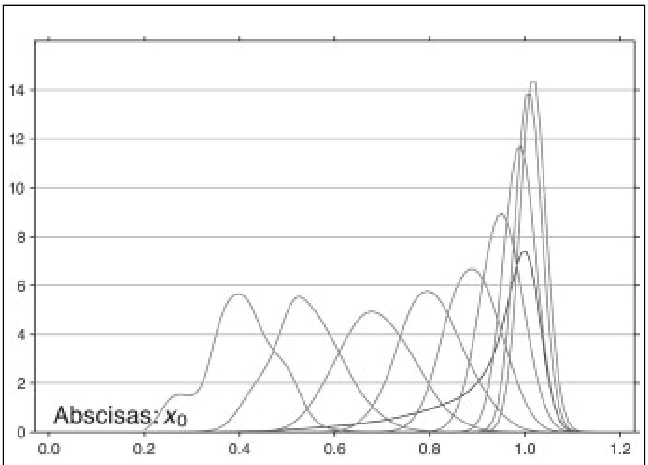


Figura 13.

Funciones de densidad de probabilidad marginal $p\hat{}(x_0)$ y condicionada $p\hat{}(x_0|x_1)$ de la muestra.

La figura 14 representa las medias $\bar{x}_0\hat{}(x_1)$, desviaciones típicas $\sigma\hat{}_0(x_1)$, modas, asimetrías y curtosis calculadas numéricamente para las funciones de densidad condicionadas $p\hat{}(x_0 \mid x_1)$ anteriormente obtenidas. Interesa señalar que para los valores elevados de x_1 (los más problemáticos para la validación del modelo), los bajos valores de la asimetría y la curtosis de estas distribuciones condicionadas permiten considerarlas aproximadamente como normales, lo cual no sería cierto para la distribución conjunta $p\hat{}(x_0)$, que es marcadamente asimétrica.

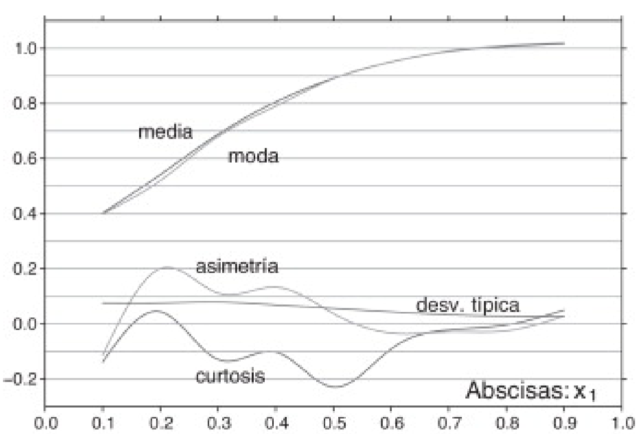


Figura 14.

Parámetros estadísticos de las funciones de densidad de probabilidad condicionada $p^{\hat{}}(x_0|x_1)$.

Los momentos de primer y segundo orden, $\mu^{\hat{}}_{0,1}(x_1) = \hat{\bar{x}}_0(x_1)$ y $\mu^{\hat{}}_{0,2}(x_1) = \hat{\bar{x}}_0{}^2(x_1) + \hat{\sigma}_0^2(x_1)$, se podrían haber obtenido directamente a partir de los datos muestrales sin necesidad de calcular las funciones $p^{\hat{}}(x_o \mid x_1)$, tal como se deduce seguidamente, con validez para cualquier núcleo simétrico:

$$\hat{\mu}_{0,n}(x_1) = \langle x_0^n \mid x_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_0^n \hat{p}(x_0 \mid x_1) \quad dx_0 = \frac{\sum_{k=1}^{N} I_{n,k}\varphi_{nor}\left(\frac{x_1 - x_{1k}}{h_1}\right)}{\sum_{k=1}^{N} \varphi_{nor}\left(\frac{x_1 - x_{1k}}{h_1}\right)},$$

siendo

$$I_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_{0k} + h_0 x_0)^n \varphi_{nor}(x) \quad dx, \qquad (24)$$

$$I_{1k} = x_{0k}$$

$$I_{2k} = x_{0k}^2 + h_0^2,$$

En este trabajo, al haber calculado las distribuciones condicionadas $p^{\hat{}}(x_0 \mid x_1)$, no ha sido necesario aplicar dichas fórmulas, que definen la denominada *regresión no lineal no paramétrica* .

5.2. Validez del estimador del factor de reducción de pandeo

Habiendo establecido el carácter aproximadamente normal de las distribuciones condicionadas $p^{\hat{}}(x_0 \mid x_1)$ para los valores más problemáticos de $x_1 = \chi^{\hat{}}$, se representa en la figura 15 el *valor característico* $\bar{x}_0{}^{\hat{}}(x_1) + \beta\hat{\sigma}_0(x_1)$, para el índice de fiabilidad $\beta = -\Phi^{-1}$ (0,05) = 1,64; serían aplicables análogamente otros valores del índice de fiabilidad β , sea tomándolos del apartado C.4.3 del documento CTE, Parte 2, DB SE de marzo de 2006 o del Eurocódigo 1, sea obteniéndolos directamente de la inversa de la función de distribución normal estándar en cualquier calculadora o paquete de cálculo estadístico.

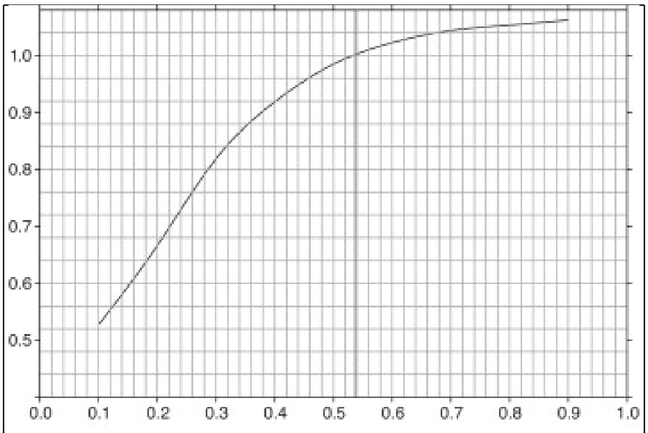


Figura 15.

Valor característico de la variable de control.

La conclusión práctica es que el estimador $\chi^{\hat{}}$, o lo que es lo mismo, la expresión de comprobación aproximada (15) , puede utilizarse en lugar del valor exacto siempre que $\chi^{\hat{}} \leq 0,55$. Para $0,55 \leq \chi^{\hat{}} \leq 1$ si se pretende asegurar la fiabilidad establecida en la normativa deberá usarse un coeficiente parcial de seguridad entre 1 y 1,06, que puede tomarse de la misma figura, o aproximarse linealmente con tales valores extremos para 0, $5 \leq \chi^{\hat{}} \leq 1$.

Los resultados anteriores han sido obtenidos aplicando un núcleo gaussiano. Con el núcleo de Epanechnikov los resultados fundamentales son muy similares: la última figura en concreto es prácticamente idéntica.

6. Aplicaciones

Como muestra, o *cata* , de alguna de las posibles aplicaciones del modelo propuesto se presentan aquí 2 de ellas.

6.1. Estimaciones rápidas

En primer lugar se estimará de forma rápida y ciertamente precisa el sobrepeso medio que supone adoptar para los pilares de edificación las secciones con perfiles HEB, frente a la alternativa más tradicional de emplear las soluciones de 2 UPN en cajón. Aunque esta última solución puede considerarse obsoleta, las conclusiones aquí obtenidas se pueden exportar, por sus similares características geométricas e *imperfecciones mecánicas* , a la alternativa de soportes de sección tubular cuadrada o rectangular conformados en frío (RHSC) de dimensiones y espesores medios o altos, con soluciones constructivas apropiadas [21] ; no se hace referencia a tubos laminados en caliente, de menores *imperfecciones equivalentes* que los UPN, pero también de coste unitario más elevado. La comparativa se refiere solo a pesos brutos de acero, sin repercusión de costes de suministro, fabricación, transporte y montaje.

Con el modelo propuesto, las 2 soluciones consideradas se distinguen en el material necesario para la diferencia en el peso de pandeo que, de acuerdo con la tabla 1 , supone 58 kN/m^2 con HEB frente a 36 kN/m^2 con la solución de UPN en cajón, lo que implica que cada soporte requiere (58 − 36) * 3^2 /27, 5 cm^2 = 7, 2 cm^2 adicionales de acero usando HEB. Esto supone que, para unos 9.670 soportes de unos 3,0 m de altura habrá un volumen adicional en acero de V_a = 9.670 × 300 × 7, 2 cm^3 , lo que supone 20, 89 m^3 adicionales de acero y por tanto 162,9T más, es decir, un 13,4% más por razón de la menor eficiencia frente a pandeo.

Podemos revisar los dimensionados efectivos del modelo estadístico realizados con aplicación estricta de las reglas de CTE, y comparar los obtenidos con ambos tipos de sección. Se obtuvo que el peso total derivado de soluciones basadas en 2 UPN en cajón asciende a 1.216 T frente a las 1.406 T necesarias para soluciones con HEB. La diferencia resultante de 190 T se explica bien:

- Por las 162,9 T ya reseñadas de mayor peso necesario por la menor eficiencia en pandeo.
- Por el mayor salto de catálogo medio de la familia de HEB frente a los UPN: 22% frente al 18,4%. Esto hace que el sobrepeso medio con HEB sea del 11% frente al 9,2% en los UPN, lo que implica un 1,8% de unas 1.200 T, es decir 21,6 T, a las que habría que anadir aún un leve incremento por ser el elemento mínimo con HEB100 algo mayor que el formado con 2 UPN80 (26,04 cm^2 en sección del primero frente a los 22,04 cm^2 de la segunda opción).

Hay que señalar aquí que la *ventaja* en peso de la solución de 2 UPN en cajón puede aprovecharse en estructuras arriostradas, que no necesitan considerar la resistencia a flexión de los pilares en su acometida al nudo, donde puede por tanto admitirse momento *nulo* . Cuando los nudos deben asegurar la resistencia a compresión excéntrica o su rigidez es necesaria para la estabilidad de la estructura, la baja fiabilidad de las soldaduras habituales de unión del cajón y su difícil o imposible inspección invalidan dicha ventaja frente a la ventaja decisiva que en ese caso presenta la unión de secciones abiertas, cuyo perímetro soldable y visibilidad —facilidad de inspección— duplica al de las secciones cerradas comparables en espesor.

Como contexto para la anterior estimación, pueden contrastarse igualmente los pesos totales: los 9.670 pilares responden a una distribución de edificios de hasta 10 pisos; un edificio típico tendrá 6 plantas, y un pilar típico tendrá 3,5 plantas encima, con 5,5 × 5 m^2 por planta y cargas de 7,0 kN/m^2 , lo que supone una carga típica de y * 673,7 kN (950 kN) por pilar, a la que debe sumarse el *peso* del pandeo, de 36 * 3^2 = 324 kN para soluciones con 2 UPN en cajón. Esto exige soportes con secciones típicas de 46,33 cm^2 , lo que supone 108,4 kg por soporte medio y por tanto 1.049 T de acero si se pudiese alcanzar siempre un dimensionado estricto. Esto no es así, y el salto típico de catálogo en UPN es del 15%, incluso del 18,4% para los primeros 8 saltos de la serie, mayoritarios en las soluciones adoptadas. Tendremos que el peso de acero necesario para los 9.670 soportes analizados será próximo a 1.049 × 1, 092 = 1.145 T, a las que habría que añadir el sobrepeso correspondiente al necesario uso del soporte mínimo de 2 UPN de 80, que tiene capacidad para una carga de hasta 22,05*27,5–324 = 282 kN, que suponen 28,6 m^2 de planta, cuando la superficie típica con una planta es 5,5*5 = 27,5 m^2 , siendo menor en más de la mitad de los casos. Cabe destacar el limitado error de ambas estimaciones.

6.2. Mapa del diseño en compresión simple

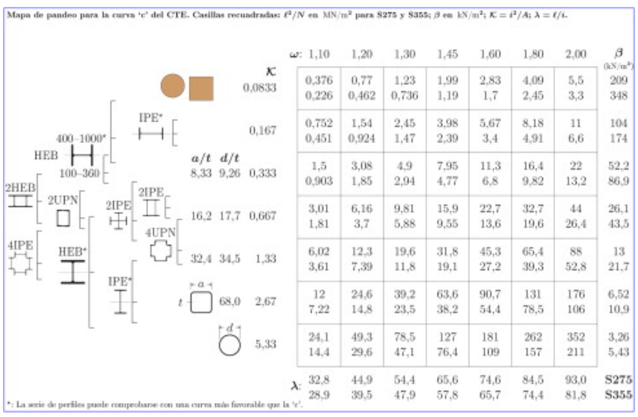
La invarianza ligada al factor l^2/N entre piezas semejantes del mismo material tiene un gran potencial conceptual: a la pregunta «¿cuándo será más importante el efecto de pandeo?», la respuesta diverge según se considere desde la perspectiva del análisis o la del diseño o proyecto. Desde el análisis, la respuesta parece inmediata: será más importante cuanta mayor sea la compresión (a igualdad de todo lo demás). Pero por el contrario, si la perspectiva es la del proyecto, cuanta más compresión, más grueso será el soporte, menos esbelto, menor será el factor de pandeo, y será por tanto menor el efecto. El pandeo (o encorvamiento) es un efecto de la falta de rigidez a flexión, que opera tanto en tracción como en compresión y que al sumarse al efecto de estas últimas solo resulta apreciable cuando el valor absoluto del esfuerzo axil es pequeño.

La invarianza del factor l^2/N tiene utilidad práctica inmediata. Aroca *dibujó* un mapa de los problemas: en vez de latitud y longitud, las coordenadas eran el tipo de sección que se debía emplear, caracterizada por su eficiencia o rendimiento K , y el factor de pandeo que podía admitirse (o la correspondiente esbeltez mecánica), entendiendo que $\omega - 1$ era el sobrecoste a pagar por emplear una sección de rendimiento K (y no una mejor). En ese paisaje, un problema de pandeo caracterizado por l^2/N ocupa una franja vagamente diagonal correspondiente a factores de pandeo decrecientes para eficiencias crecientes. Con el mapa, y dado un problema, se puede saber con razonable certeza qué factor de pandeo corresponderá a la eficiencia de cada tipo, o a la inversa, qué distintos tipos de sección permitirán resolver el problema con un factor de pandeo concreto (es decir, a un cierto «precio»).

La regla 15 para cada β corresponde en el mapa a una franja horizontal que, en ciertos casos, corresponde a un tipo de perfil concreto, como la sección cuadrada, o los IPE o HEB de igual longitud de pandeo en ambos planos.

Desde luego, resolver un problema de compresión con una pieza en parte traccionada es una mala solución, de manera que el mapa se trazó para valores de ω no mayores que 2, un requisito que cabe mantener.

En la última figura (fig. 16) se muestra el mapa adaptado al CTE para la curva de pandeo «c». Aunque el mapa puede dibujarse (curvas de igual valor para l^2/N), en el día a día es más útil la concreción en unos cuantos números entre los que se puede interpolar a ojo con tranquilidad. Los 7 valores para ω se han elegido a la vista de la «precisión» con que puede elegirse un área para la sección transversal en los catálogos de los fabricantes. De la misma manera ha ocurrido con los 7 para K , a la vista de su variabilidad en esos mismos catálogos dentro de gamas de perfiles que tienden a verse como semejantes aunque rara vez lo sean (cada perfil tiene su eficiencia según su tamaño, salvo en casos canónicos como el cuadrado o el círculo). Por tanto, se trata de 49 problemas de pandeo y sus posibles soluciones que resumen todos aquellos que pueden resolverse con un perfil o con la composición simple de varios de ellos. (Para problemas de pandeo mayores hay que acudir a secciones no conexas para las que el mapa podría ampliarse pero, puesto que generalmente no se trata de situaciones repetitivas, «turísticas», sino más bien de aventuras, el explorador podrá adentrarse sin mapa en esos territorios).



a/t	d/t	K	ω: 1,10	1,20	1,30	1,45	1,60	1,80	2,00	β (kN/m²)
		0,0833	0,376 0,226	0,77 0,462	1,23 0,736	1,99 1,19	2,83 1,7	4,09 2,45	5,5 3,3	209 348
		0,167	0,752 0,451	1,54 0,924	2,45 1,47	3,98 2,39	5,67 3,4	8,18 4,91	11 6,6	104 174
8,33	9,26	0,333	1,5 0,903	3,08 1,85	4,9 2,94	7,95 4,77	11,3 6,8	16,4 9,82	22 13,2	52,2 86,9
16,2	17,7	0,667	3,01 1,81	6,16 3,7	9,81 5,88	15,9 9,55	22,7 13,6	32,7 19,6	44 26,4	26,1 43,5
32,4	34,5	1,33	6,02 3,61	12,3 7,39	19,6 11,8	31,8 19,1	45,3 27,2	65,4 39,3	88 52,8	13 21,7
	68,0	2,67	12 7,22	24,6 14,8	39,2 23,5	63,6 38,2	90,7 54,4	131 78,5	176 106	6,52 10,9
		5,33	24,1 14,4	49,3 29,6	78,5 47,1	127 76,4	181 109	262 157	352 211	3,26 5,43
		λ:	32,8 28,9	44,9 39,5	54,4 47,9	65,6 57,8	74,6 65,7	84,5 74,4	93,0 81,8	S275 S355

Figura 16.

Mapa de pandeo para la curva 'c' del CTE.

Resulta, por tanto, un mapa cuadrado que cuadra el diseño en compresión simple. (*Simple* nunca lo era por la inestabilidad y el pandeo, pero al final resulta que la cosa no era para tanto.) Para su uso debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Para cada serie de perfiles no semejantes se indican sus rendimientos mínimo, medio y máximo, correspondientes a los catálogos disponibles en España. La excepción es la de los tubos huecos, ya sean redondos o cuadrados. Debido a la diversidad de catálogos de los fabricantes, para estos se ha preferido indicar la relación lado/espesor que corresponde a cada una de las eficiencias elegidas, cuando tal rendimiento existe en el catálogo de la norma UNE EN 10219-2-98.
- Todas las secciones se han clasificado *como si su curva de pandeo fuera la «c»* . Cuando no es el caso, se indica con una marca en la denominación de la serie. Cuando no es la curva «c», se trata siempre de una curva más favorable de manera que el coeficiente de pandeo predicho por el mapa está sobrestimado, y el uso del coeficiente β pertinente conducirá a diseños seguros pero no demasiado ajustados. La excepción puede ser de nuevo la de los tubos si se usan laminados en caliente, para los cuales la curva es más favorable que la «c»; pero salvo especificaciones rigurosas en fase de proyecto y control, es una opción apropiada considerar que los tubos serán conformados en frío, por lo que no constan los laminados en caliente en la tabla.
- Cuando la serie de perfiles se ha clasificado atendiendo a su rendimiento en uno de los ejes principales de inercia, se indica el eje empleado. En otro caso, cada sección se ha clasificado atendiendo al eje con menor rendimiento, de manera que si la esbeltez máxima en un caso concreto no se corresponde con ese eje, el coeficiente de pandeo predicho estará sobre-estimado, pero solo en el caso de secciones con inercia anisótropa. La misma observación anterior puede hacerse respecto de β .

Nótese que la idea de un mapa es aplicable a otros materiales, siempre que l^2/N sea invariante con el tamaño, que es lo habitual. En el caso de que ω sea función de λ , la estructura del mapa será similar a la del acero, como sucede con la madera y el hormigón armado. Para su trazado, basta con seleccionar los valores de ω y K que hay que rotular y calcular el problema l^2/N que cada par de valores resuelve estrictamente. El mapa queda listo para su uso.

Observando el mapa de frente se llega a una conclusión crucial para una *teoría del diseño de estructuras:* si hay libertad formal suficiente, esta puede emplearse para *disolver* el problema de pandeo hasta hacerlo desaparecer. Esta conclusión apunta a que la parte de un problema que es efecto de la forma estructural adoptada (βl^2 , l) y que puede aislarse del problema original (N , l) aporta una buena medida o un buen indicador de los defectos o compromisos de decisión que conducen a dicha forma, de su sobrecoste o de su inadecuación. La búsqueda de la máxima economía —o de la perfección en la forma para alcanzarla—, por el contrario, mantiene el problema original lo más inalterado posible. Esta conclusión puede verificarse para muchos otros problemas de *resistencia* (teorema de Maxwell [6] , por ejemplo) o de *rigidez* (*optimum compliance*[11] and [22] , por ejemplo); de hecho, sirve para plantear de un modo general el problema de optimación de estructuras [23] . Se trata por tanto de una conclusión de crucial importancia para una *economía de los artefactos con utilidad* .

7. Conclusiones

En el presente trabajo se han propuesto diversas aproximaciones para facilitar la estimación rápida del factor de reducción de pandeo en edificación.

Se ha justificado la existencia de un parámetro, P , que atribuye un mismo problema de pandeo a problemas aparentemente muy diferentes en carga, longitud, material o tipo de sección.

Se ha propuesto, de acuerdo con dicho parámetro, una expresión que permite estimar con sencillez y precisión las necesidades de sobredimensionado en compresión para asegurar la rigidez necesaria frente a pandeo. La propuesta consiste, según la expresión (15) , en añadir a la comprobación en compresión simple el equivalente a un sobrepeso derivado de una presión fácilmente determinable para cada gama de secciones, mediante la expresión (18) , aplicada a una superficie igual al cuadrado de la longitud de pandeo.

Dicha expresión resulta plenamente adecuada al dimensionado cuando la gama de secciones utilizables mantiene un rango adecuado de semejanza geométrica, que puede describirse por la estabilidad en el parámetro $K = I/A^2 = i^2/A$.

Se ha validado la expresión de comprobación (15) de acuerdo con los criterios probabilistas aplicados en la normativa vigente, lo que permitiría su empleo con cumplimiento estricto de dichos criterios.

La sencillez de la expresión permite su aplicación en un amplio conjunto de situaciones:

- Para el predimensionado inteligente: la propuesta a priori de secciones apropiadas y casi coincidentes o idénticas a las necesarias.
- Para la estimación de valores o cantidades globales en magnitudes de interés relativas al consumo estructural.
- En verificaciones rápidas y fácilmente intuitivas —a ojo— para la comprobación o validación de soluciones obtenidas por otros métodos, en consideración a los potenciales errores cometidos en su aplicación.

La sencillez de la expresión no oculta sino que, por el contrario, permite expresar con precisión el fenómeno de pandeo como excentricidad real en la situación de equilibrio, y permite así establecer a priori estimaciones apropiadas para la excentricidad máxima por inestabilidad.

La propuesta aporta, por tanto, una herramienta de enorme interés en distintas fases del proyecto de estructuras de acero, particularmente en las iniciales.

References

[1] R. Aroca Hernández-Ros. Curso de Diseño de Estructuras. E.T.S. Arquitectura de Madrid, Madrid, 1984.

[2] R. Aroca Hernández-Ros. Flexión Compuesta y Pandeo en Barras Rectas, volume 29.01 of Cuadernos. Instituto Juan de Herrera, (ETSAM), Madrid, 1998.

[3] J. González Cárceles. Análisis del proceso de diseño de estructuras porticadas. PhD thesis, Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Madrid, 1990.

[4] H.L. Cox; The Design of Structures of Least Weight; Pergamon Press (1965)

[5] J.L. de Miguel Rodríguez. MV 103, Diseño de piezas, volume 33 of Información Tecnológica Estructuras. Seminario de Diseño de Estructuras, Madrid, 1985.

[6] J. Cervera. Diseño de estructuras en edificación. Instituto Juan de Herrera, Madrid, 1993.

[7] J. Antuña Bernardo, M. Vázquez Espí. Mecánica de sólidos y sistemas estructurales, 2007.

[8] W.E. Aryton, J. Perry; On struts; The Engineer (1886)

[9] J. Dutheil. Théorie de l'inestabilité par divergence d'équilibre. In Association Internationale des Pont et Charpentes, editor, IV Congrès, Publication préliminaire. 1952.

[10] L. Euler; Sur la force des colonnes; Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin, 13 (1759), pp. 252–282

[11] E.W. Parkes; Braced Frameworks; an introduction to the theory of structures; Pergamon Press, Oxford, New York (1965)

[12] T. Young; A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts; J. Johnson, Londres (1807)

[13] TC 8 European Convention for Constructional Steelwork. Manual on Stability of Steel Structures. 1976.

[14] R. Maquoi, J. Rondal; Mise en Équation des nouvelles courbes européennes de flambement; Construction Métallique, 1 (1978), pp. 17–30

[15] M.A. Ortega, J.L. Romero, E. de la Rosa; Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. parte i; Informes de la Construcción, 59 (507) (2007), pp. 69–81

[16] M.A. Ortega, J.L. Romero, E. de la Rosa; Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. parte ii; Informes de la Construcción, 59 (508) (2007), pp. 61–71

[17] J. Fan, Q. Yao; Non linear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods; Springer (2005)

[18] R. Foundation. The r project for statistical computing, 2011.

[19] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman; The Elements of Statistical Learning; Springer (2001)

[20] Y. Reyes, H. Yervilla, A. Viamontes, C. Recarey; Utilización de árboles de cubrimiento para interpolar usando funciones de base radial, enfocado a la visualización científica de grandes volúmenes de datos; Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 25 (4) (2009), pp. 283–298

[21] Y. Kurobane, J.A. Packer, J. Wardenier, N. Yeomans. Design guide for structural hollow section column connections. CIDECT: TÜV Verlag, 2005.

[22] J. Cervera. Tres teoremas fundamentales de la teoría del diseño de estructuras. Informes de la Construcción, 40 (399) (1989):57–66.

[23] W. Prager; Optimality criteria in structural design; Applied Physical Sciences, 61 (1968), pp. 794–796

Notes

1. Esta es probablemente una de las primeras referencias, dado que las publicaciones docentes o divulgativas de un par de años antes aún no recogían la idea. Una cita próxima en el tiempo es González Cárceles [3] . La idea, que muestra la existencia de condiciones de proporcionalidad entre las soluciones a diferentes problemas de pandeo, es una elaboración independiente que presenta un importante paralelismo teórico con [4, cap. 2, pág. 7, (3)] , expresión con la que Cox traza el cociente entre la tensión crítica de pandeo y el peso específico del material, en función de lo que él llama *structural loading coefficient* —expresado como N/l^2 — en la forma $\frac{\sigma_k}{\rho} = \pi\sqrt{\frac{i^2}{A}}\frac{\sqrt{E}}{\rho}\sqrt{\frac{N}{l^2}}$ particularizada para la pieza cilíndrica de sección maciza, ecuación que hemos reescrito aquí de acuerdo con la simbología empleada a lo largo de nuestro texto.

2. Representa efectivamente tanto el caso de los perfiles habituales en la dirección de su inercia débil, como las agrupaciones de perfiles, etc.

3. Para la misma posición de la secante y las distintas curvas de pandeo de CTE los valores del coeficiente de la expresión 18 serían

$curva$	a_0	a	b	c	d
α	0, 13	0, 21	0, 34	0, 49	0, 76
β_0	0, 26	0, 31	0, 40	0, 50	0, 69

aunque la elección de la secante adecuada requeriría un ajuste como el realizado para la curva c , cuyos resultados se presentan en el apartado siguiente.

4. Un valor relativo mayor implica más eficiencia o mejor rendimiento frente a problemas que exijan rigidez.